



## Olimpiada Națională Gazeta Matematică

Etapa Locală, 08 februarie 2025

Clasa a VIII-a

### Problema 1

Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât  $[a]=3$  și  $[b]=1$ . Aflați valoarea expresiei

$$E = \sqrt{a^2 - 6a + 9} + \sqrt{4 - 4b + b^2} - \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$$

(notația  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ ).

### Problema 2

Arătați că  $24\sqrt{2} \leq \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35$ , pentru orice numere reale  $x \in [2;3]$  și  $y \in [3;4]$ .

*Suplimentul G.M.*

### Problema 3

Se consideră punctele necoplanare  $O, A, B$  și  $C$  astfel încât  $m(\angle AOB) = m(\angle BOC) = m(\angle COA) = 90^\circ$ .

a) Demonstrați că perpendiculara dusă din punctul  $O$  pe planul  $(ABC)$  cade în ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

b) Arătați că  $(A_{ABC})^2 = (A_{AOB})^2 + (A_{BOC})^2 + (A_{COA})^2$ .

### Problema 4

Determinați trei numere naturale consecutive știind că primul este număr prim, al doilea este un cub perfect și cel de-al treilea este un pătrat perfect.

**Notă:** Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.



**Olimpiada Națională Gazeta Matematică**

**Etapă Locală, 08 februarie 2025**

**Clasa a VIII-a**

**BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE**

**Problema 1**

Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât  $[a] = 3$  și  $[b] = 1$ . Aflați valoarea expresiei

$$E = \sqrt{a^2 - 6a + 9} + \sqrt{4 - 4b + b^2} - \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$$

(notația  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ ).

SOLUȚIE / BAREM	Punctaj
Din enunț obținem $3 \leq a < 4$ și $1 \leq b < 2$ , deci $a > b$ .	1 p
Expresia devine succesiv: $E = \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2-b)^2} - \sqrt{(a-b)^2} =  a-3  +  2-b  -  a-b $ .	4 p
Cum $a-3 \geq 0$ , $2-b > 0$ și $a-b > 0$ rezultă de aici că $ a-3  = a-3$ , $ 2-b  = 2-b$ și $ a-b  = a-b$ . Deci, în final, $E = (a-3) + (2-b) - (a-b) = -1$ .	2 p

**Problema 2**

Arătați că  $24\sqrt{2} \leq \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35$ , pentru orice numere reale  $x \in [2;3]$  și  $y \in [3;4]$ .

*Suplimentul G.M.*

SOLUȚIE / BAREM	Punctaj
Din $m_a \geq m_g$ , pentru numerele $x; \frac{6}{x} > 0$ și respectiv $y; \frac{12}{y} > 0$ rezultă: $x + \frac{6}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} = 2\sqrt{6}$ (1)	2 p
și respectiv $y + \frac{12}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{12}{y}} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ . (2)	2 p
Înmulțind relațiile (1) și (2) rezultă $\left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \geq 2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{2}$ ; egalitatea se realizează când avem egalitate în (1) și (2), adică $x = \frac{6}{x}$ și $y = \frac{12}{y}$ , deci $x = \sqrt{6} \in [2;3]$ și respectiv $y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \in [3;4]$	
Din $x \in [2;3]$ rezultă $(x-2)(x-3) \leq 0$ sau $x^2 + 6 \leq 5x$ și împărțind cu $x > 0$ rezultă $x + \frac{6}{x} \leq 5$ . (3)	1 p
Din $y \in [3;4]$ rezultă $(y-3)(y-4) \leq 0$ sau $y^2 + 12 \leq 7y$ și împărțind cu $y > 0$ rezultă $y + \frac{12}{y} \leq 7$ . (4)	1 p
Prin înmulțirea relațiilor (3) și (4) obținem inegalitatea din dreapta a relației de demonstrat. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x \in \{2;3\}$ și $y \in \{3;4\}$ .	1 p



### Problema 3

Se consideră punctele necoplanare  $O, A, B$  și  $C$  astfel încât  $m(\angle AOB) = m(\angle BOC) = m(\angle COA) = 90^\circ$ .

- a) Demonstrați că perpendiculara dusă din punctul  $O$  pe planul  $(ABC)$  cade în ortocentrul triunghiului  $ABC$ .
- b) Arătați că  $(A_{ABC})^2 = (A_{AOB})^2 + (A_{BOC})^2 + (A_{COA})^2$ .

SOLUȚIE / BAREM		Punctaj
a)	Fie $OH \perp (ABC)$ , cu $H \in (ABC)$ , deci $OH \perp BC$ , adică $BC \perp OH$ .	1 p
	Cum $OA \perp OB$ și $OA \perp OC$ rezultă $OA \perp (OBC)$ , de unde $OA \perp BC$ , adică $BC \perp OA$ . Așadar $BC \perp OH$ și $BC \perp OA$ și de aici rezultă că $BC \perp (OAH)$ , deci $BC \perp AH$ , ceea ce înseamnă că $AH$ este înălțime în triunghiul $ABC$ .	2 p
	Analog se arată că și $BH$ este tot înălțime și deci $H$ este ortocentrul triunghiului $ABC$ .	1 p
b)	Fie $D \in (AB)$ piciorul înălțimii din $C$ în triunghiul $ABC$ . Cum $OC \perp OA$ , $OC \perp OB$ , deci $OC \perp (OAB)$ , deducem că $OC \perp OD$ , adică triunghiul $COD$ este dreptunghic în $O$ . Cu Teorema lui Pitagora în triunghiurile $OCD$ și $OAB$ obținem $CD^2 = OC^2 + OD^2$ și $AB^2 = OA^2 + OB^2$ , de unde rezultă $4 \cdot (A_{ABC})^2 = CD^2 \cdot AB^2 = (OC^2 + OD^2) \cdot (OA^2 + OB^2) = (OC \cdot OA)^2 + (OC \cdot OB)^2 + OD^2 \cdot \left( \frac{OA^2 + OB^2}{AB^2} \right) = 4 \cdot (A_{COA})^2 + 4 \cdot (A_{BOC})^2 + \left( \frac{OD \cdot AB}{=2 \cdot A_{AOB}} \right)^2 \Rightarrow \Rightarrow 4 \cdot (A_{ABC})^2 = 4 \cdot (A_{AOB})^2 + 4 \cdot (A_{BOC})^2 + 4 \cdot (A_{COA})^2$ , adică concluzia.	3 p

### Problema 4

Determinați trei numere naturale consecutive știind că primul este număr prim, al doilea este un cub perfect și cel de-al treilea este un pătrat perfect.

SOLUȚIE / BAREM		Punctaj
	Conform enunțului, fie $p$ un număr prim pentru care $p+1 = n^3$ și $p+2 = m^2$ , cu $m, n \in \mathbb{N}^*$ .	2 p
	Din relația $p+1 = n^3$ obținem $(n-1)(n^2+n+1) = p$ și, cum $p$ este prim, iar $n-1 < n^2+n+1$ , deducem că $\begin{cases} n-1=1 \\ n^2+n+1=p \end{cases}$ . Rezultă de aici că $n=2$ și $p=7$ , care e prim.	4 p
	Din $p=7$ obținem că $p+1=8$ este cub perfect, iar $p+2=9$ este pătrat perfect. În concluzie numerele cerute sunt 7, 8 și 9.	1 p
<b>OBS:</b> Dacă "se intuiesc" cele trei numere, dar nu se indică nicio metodă de determinare a lor, se acordă 1 p.		